Convergence d'une suite de polygones.

Leçon : 152, 181, 226, 149, 191, 223

Réf : X. Gourdon, Analyse (⚠ pas toute la preuve)
Ex 4. p180

Lemme On considère la matrice circulante $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & a_2 \\ a_2 & & & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

Alors il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$$Q^{-1} A Q = \mathrm{diag}(P(1), P(\omega), \ldots, P(\omega^{n-1}))$$

où $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1} = a_1 + a_2 X + \cdots + a_n X^{n-1}$.

En particulier, $\det(A) = P(1) P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1})$.

Démonstration

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Alors $J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. $\forall p \in [\![0, n]\!]$

(par récurrence ou en considérant l'end. associé à J dans la base canonique).

Donc $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} J^i = P(J)$.

Déterminons χ_J.

On remarque $\pi_J \mid X^n - 1$, car $J^n - I = 0$.

De plus, si $Q \in \mathbb{K}[X]$, $d^\circ Q \leq n-1$, $Q(J) \neq 0$.

Donc $d^\circ \pi_J \geq n$. Ainsi $d^\circ \pi_J = n$, $\pi_J = X^n - 1$.

Or, par Cayley-Hamilton, $\pi_J \mid \chi_J$ et $d^\circ \chi_J = n$.

Donc $\chi_J = X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X - \omega^i)$.

χ_J est scindé à racines simples, donc J diagonalisable.

Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $Q^{-1} J Q = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors : $Q^{-1} A Q = Q^{-1} P(J) Q \underset{(Q^{-1}JQ)^k = Q^{-1}J^kQ}{=} P(Q^{-1} J Q) = \begin{pmatrix} P(1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$.

□

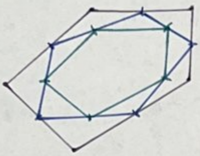
Théorème Soit $\mathcal{P}_0$ un polygone du plan. On construit une suite $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polygones par récurrence :

- $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0$
- $\forall n \geq 1$: $\mathcal{P}_n$ est le polygone dont les sommets sont les milieux des côtés de $\mathcal{P}_{n-1}$

Alors les sommets de $\mathcal{P}_n$ converge vers le centre de gravité de $\mathcal{P}_0$.

<u>Démonstration</u>

$m=0$
$m=1$
$m=2$



Soit N le nombre de point de $\mathcal{P}_0$. On identifie le plan $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe $\mathbb{C}$.

Soit $Z_k \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{C})$ les coordonnées des sommets du polygone $\mathcal{P}_k$.
Alors, en notant $Z_k = (Z_k(1), \dots, Z_k(N))$, et en travaillant dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ $Z_{k+1}(j) = \frac{Z_k(j) + Z_k(j+1)}{2}$.
(Être dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ permet d'écrire $Z_{k+1}(N) = \frac{Z_k(N) + Z_k(1)}{2}$.)

Alors $Z_{k+1} = A Z_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, avec $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $Z_k = A^k Z_0$.

Par le lemme, $\chi_A(X) = \prod_{i=0}^{n-1} (X - P(\omega^i))$, où $\omega = e^{2i\pi/N}$

et $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X = \frac{X+1}{2}$.

Donc $\chi_A(X) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(X - \frac{1+\omega^i}{2}\right)$. χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1+\omega^{n-1}}{2} \end{pmatrix} Q$

donc $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underbrace{Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q}_{:= B}$ (car $\left|\frac{1+\omega^k}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(\left(1+\cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right)^2 + \sin\left(\frac{2k\pi}{N}\right)^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(2 + 2\underbrace{\cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)}_{<1}\right)$

< 1)

Alors $Z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} BZ_0$.

et $Z_{k+1} = A(A^k Z_0)$, donc par continuité du produit matriciel,

$BZ_0 = A(BZ_0)$

Donc BZ_0 est un vecteur propre de A associé à la vp 1.

Or $\dim E_1(A) = 1$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$.

Donc $BZ_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, donc $Z_k \to \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Soit g_0 l'isobarycentre de $\mathcal{P}_0$, ie $g_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} Z_0(i)$.

Alors g_0 est aussi l'isob. de $\mathcal{P}_k$. En effet, si on note g_k l'isob. de $\mathcal{P}_k$, alors:

$$g_{k+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_{k+1}(i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_k(i) + Z_k(i+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} Z_k(i) + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} Z_k(i+1)$$

$$= \frac{g_k}{2} + \frac{g_k}{2} = g_k.$$

Par récurrence, $g_k = g_0$

et $g_k \to \lambda$. Donc $\boxed{\lambda = g_0}$

□

Rmq: - question : vitesse de convergence ?
- et si $z_{n+1}(j) = p z_n(j) + (1-p) z_n(j+1)$? $p \in [0,1] \to$ on converge toujours vers le barycentre ($p \in]0,1[$).